

Gruppenübung 2

Definitionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- *positiv definit* wenn $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- *positiv semidefinit* wenn $f(0) = 0$ und $f(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- *negativ definit* wenn $-f$ positiv definit ist,
- *negativ semidefinit* wenn $-f$ positiv semidefinit ist und
- *indefinit* wenn f weder positiv noch negativ definit ist.

f heißt *radial unbeschränkt*, wenn $|f(x)| \rightarrow \infty$ für $\|x\| \rightarrow \infty$.

Aufgabe 1 Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit, negativ definit oder indefinit sind. Zeichnen Sie die Niveaumengen $N_c := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | V(x_1, x_2) = c\}$ der Funktionen. Sind die Funktionen radial unbeschränkt? Testen Sie gegebenenfalls ob Sie die Funktion durch die Addition einer Konstante positiv definit machen können.

a) $V(x_1, x_2) := x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

b) $V(x_1, x_2) := x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$

c) $V(x) = e^{x_1^2 + x_2^2}$

Aufgabe 2 Sei $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $V(x) := x^T P x$, wobei P eine quadratische, symmetrische Matrix ist. Welche Eigenschaften muss P erfüllen damit V positiv definit ist. Geben Sie eine Methode an um diese Eigenschaft bei einer konkreten Matrix zu überprüfen.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie für folgende Systeme die Stabilitätseigenschaften (lokal asymptotisch stabil, lokal exponentiell stabil, global asymptotisch stabil, global exponentiell stabil, exponentiell stabil) des Ursprungs $x = 0$. Verwenden Sie hierzu $V(x) = \frac{1}{2}x^2$. Welche Aussagen erlaubt die Linearisierungsmethode?

a) $\dot{x} = -x^3, x(0) = x_0$

b) $\dot{x} = x^2, x(0) = x_0$

c) $\dot{x} = -(e^x - 1), x(0) = x_0$

Aufgabe 4 Sei $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(a) = 0$. Wir betrachten

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0.$$

- Bestimmen Sie die Ruhelage des Systems.
- Transformieren Sie das System so dass die Ruhelage in 0 liegt.

- c) Untersuchen Sie das transformierte System mit Hilfe der Linearisierungsmethode auf Stabilität.
- d) Untersuchen Sie das transformierte System mit Hilfe einer quadratischen Lyapunov-Funktion V auf Stabilität.
- e) Untersuchen Sie das transformierte System mit Hilfe der Funktion (nach Krasowskii) $V(x) := g(x)^2$ auf Stabilität, dabei ist g das transformierte Vektorfeld.
- f) Untersuchen Sie das transformierte System mit Hilfe der Funktion $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $V(x) := -\int_0^x g(s)ds$ auf Stabilität. Wie oben bezeichnet, ist g das transformierte Vektorfeld.

Aufgabe 5 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - x_2.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine geeignete Lyapunov-Funktion $V(x_1, x_2)$ und weisen Sie die Stabilität des Ursprungs nach.